

# Complexiteit van Sociale Keuze Problemen

## IN3105

**Tomas Klos**

5 maart 2008

# Sociale Keuze

Van Dale: **so·ci·aal** (bijvoeglijk naamwoord):

1. geneigd om in groepen te leven
2. betrekking hebbend op de menselijke samenleving
3. gevoel hebbend voor de noden v/d medeleden v/d samenleving

# Sociale Keuze

Van Dale: **so·ci·aal** (bijvoeglijk naamwoord):

1. geneigd om in groepen te leven
2. betrekking hebbend op de menselijke samenleving
3. gevoel hebbend voor de noden v/d medeleden v/d samenleving

Sociale **keuze**: ‘sociaal’ als kenmerk van

- proces: *gemeenschappelijk, groepsgewijs*
- uitkomst: eerlijk, ‘goed’ voor ieder of voor de groep, ...

# Sociale Keuze

## 1. Groeps-keuzeproces

- kiezen wat we vanavond eten
- wie de nieuwe president van de VS wordt
- of er een tulp-eiland voor de kust komt
- wie de uitzendrechten van de eredivisie krijgt

# Sociale Keuze

## 1. Groeps-keuze**proces** (Aggregeren van Preferenties)

- kiezen wat we vanavond eten
- wie de nieuwe president van de VS wordt
- of er een tulp-eiland voor de kust komt
- wie de uitzendrechten van de eredivisie krijgt

# Sociale Keuze

## 1. Groeps-keuze**proces** (Aggregeren van Preferenties)

- kiezen wat we vanavond eten
- wie de nieuwe president van de VS wordt
- of er een tulp-eiland voor de kust komt
- wie de uitzendrechten van de eredivisie krijgt

## 2. Sociale keuze: in de **uitkomst** van de groepskeuze . . .

- krijgt iedereen wat hij wil . . .
- . . . meestal onmogelijk (bijv. Politie onderhandelingen)

# Sociale Keuze

## 1. Groeps-keuze**proces** (Aggregeren van Preferenties)

- kiezen wat we vanavond eten
- wie de nieuwe president van de VS wordt
- of er een tulp-eiland voor de kust komt
- wie de uitzendrechten van de eredivisie krijgt

## 2. Sociale keuze: in de **uitkomst** van de groepskeuze . . .

- krijgt iedereen wat hij wil . . .
- . . . meestal onmogelijk (bijv. Politie onderhandelingen)
- → maximaliseer totale nut ('welvaart'): Pareto Optimaliteit
- niemand kan nut vergroten zonder dat iemands nut verkleint

# Voorbeeld Preferentie Aggregatie

?

# Voorbeeld Preferentie Aggregatie

? (Algoritmiek 2006-2007)

# Voorbeeld Preferentie Aggregatie

Stable Matching

# Voorbeeld Preferentie Aggregatie

## Stable Matching

- verzameling  $N$  mannen en  $N$  vrouwen
- elke man ordent alle vrouwen en vice versa (**preferenties**)

# Voorbeeld Preferentie Aggregatie

## Stable Matching

- verzameling  $N$  mannen en  $N$  vrouwen
- elke man ordent alle vrouwen en vice versa (**preferenties**)
- Gale-Shapley algoritme geeft een Matching (**aggregatie**)
  - toewijzing van elke man aan één vrouw en vice versa
  - optimaal (voor degenen die aanzoeken doen)
  - liegen over je preferenties heeft geen zin (eerlijk is 'dominant')

# Complexiteit van Sociale Keuze

Waarom bestuderen we dit?

# Complexiteit van Sociale Keuze

Waarom bestuderen we dit?

Toewijzen (bijv.) is een moeilijk probleem

- complexiteit genegeerd door sociale wetenschappers
- domein van theoretisch informatici

# Complexiteit van Sociale Keuze

Waarom bestuderen we dit?

Toewijzen (bijv.) is een moeilijk probleem

- complexiteit genegeerd door sociale wetenschappers
- domein van theoretisch informatici

Sociale wetenschappen vormen de nieuwste speeltuin voor theoretisch informatici

# Complexiteit van Sociale Keuze

Waarom bestuderen we dit?

Toewijzen (bijv.) is een moeilijk probleem

- complexiteit genegeerd door sociale wetenschappers
- domein van theoretisch informatici

Sociale wetenschappen vormen de nieuwste speeltuin voor theoretisch informatici

Complexiteit van

- allocaties, marktmechanisme
- agent besluitvorming
- ontwerpen van interactieprotocollen

# Overzicht

Sociale keuze: rationele agenten en groepskeuze-protocol

# Overzicht

Sociale keuze: rationele agenten en groepskeuze-protocol

- agenten maximaliseren hun eigen nut, desnoods t.k.v. groepsnut
- moeten preferenties rapporteren
- zullen daarover liegen als dat hun nut verhoogt

# Overzicht

## Sociale keuze: rationele agenten en groepskeuze-protocol

- agenten maximaliseren hun eigen nut, desnoods t.k.v. groepsnut
- moeten preferenties rapporteren
- zullen daarover liegen als dat hun nut verhoogt
- het protocol neemt de preferenties en produceert een keuze
- die keuze moet 'sociaal' zijn
- de agenten mogen er niet *door te liegen* op vooruit kunnen gaan

# Overzicht

## Sociale keuze: rationele agenten en groepskeuze-protocol

- agenten maximaliseren hun eigen nut, desnoods t.k.v. groepsnut
- moeten preferenties rapporteren
- zullen daarover liegen als dat hun nut verhoogt
- het protocol neemt de preferenties en produceert een keuze
- die keuze moet 'sociaal' zijn
- de agenten mogen er niet *door te liegen* op vooruit kunnen gaan

## We beperken ons tot verkiezingsmethoden (voting systems)

1. complexiteit van het bepalen van de macht van een kiezer
2. complexiteit van het manipuleren van een verkiezing

# Verkiezingen: het slechte nieuws

Arrow's Theorem (1950)

(Social Welfare) met  $\geq 3$  alternatieven is het onmogelijk individuele preferentie-ordeningen te aggregeren tot een groepspreferentie-ordening die aan redelijke criteria voldoet

# Verkiezingen: het slechte nieuws

Arrow's Theorem (1950)

(Social Welfare) met  $\geq 3$  alternatieven is het onmogelijk individuele preferentie-ordeningen te aggregeren tot een groepspreferentie-ordening die aan redelijke criteria voldoet

Gibbard-Satterthwaite Theorem (1973/1975)

(Social Choice) met  $\geq 3$  alternatieven is elk niet-dictatoriaal voting systeem dat één alternatief kiest kwetsbaar voor strategisch gedrag

# Verkiezingen: het slechte nieuws

Arrow's Theorem (1950)

(Social Welfare) met  $\geq 3$  alternatieven is het onmogelijk individuele preferentie-ordeningen te aggregeren tot een groepspreferentie-ordening die aan redelijke criteria voldoet

Gibbard-Satterthwaite Theorem (1973/1975)

(Social Choice) met  $\geq 3$  alternatieven is elk niet-dictatoriaal voting systeem dat één alternatief kiest kwetsbaar voor strategisch gedrag

(Nobelprijs Economie 1972: John Hicks en Kenneth Arrow)

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- 2 alternatieven (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- **2 alternatieven** (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*
- **$\geq 3$  alternatieven**, bijvoorbeeld  $a$ ,  $b$  en  $c$ :

kiezer 1:  $a \succ_1 b \succ_1 c$

kiezer 2:  $b \succ_2 c \succ_2 a$

kiezer 3:  $c \succ_3 a \succ_3 b$

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- **2 alternatieven** (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*
- **$\geq 3$  alternatieven**, bijvoorbeeld  $a$ ,  $b$  en  $c$ :

kiezer 1:  $a \succ_1 b \succ_1 c$

kiezer 2:  $b \succ_2 c \succ_2 a$

kiezer 3:  $c \succ_3 a \succ_3 b$

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- 2 alternatieven (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*
- $\geq 3$  alternatieven, bijvoorbeeld  $a$ ,  $b$  en  $c$ :

kiezer 1:  $a \succ_1 b \succ_1 c$

kiezer 2:  $b \succ_2 c \succ_2 a$

kiezer 3:  $c \succ_3 a \succ_3 b$

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- 2 alternatieven (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*
- $\geq 3$  alternatieven, bijvoorbeeld  $a$ ,  $b$  en  $c$ :

kiezer 1:  $a \succ_1 b \succ_1 c$

kiezer 2:  $b \succ_2 c \succ_2 a$

kiezer 3:  $c \succ_3 a \succ_3 b$

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- **2 alternatieven** (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*
- **$\geq 3$  alternatieven**, bijvoorbeeld  $a$ ,  $b$  en  $c$ :

kiezer 1:  $a \succ_1 b \succ_1 c$

kiezer 2:  $b \succ_2 c \succ_2 a$

kiezer 3:  $c \succ_3 a \succ_3 b$

de meerderheid prefereert  $a \succ b \succ c \succ a$

# Arrow's Theorem: een voorbeeld

preferenties van agenten aggregeren

- **2 alternatieven** (Obama & McCain): *meerderheidskeuze*
- **$\geq 3$  alternatieven**, bijvoorbeeld  $a$ ,  $b$  en  $c$ :

kiezer 1:  $a \succ_1 b \succ_1 c$

kiezer 2:  $b \succ_2 c \succ_2 a$

kiezer 3:  $c \succ_3 a \succ_3 b$

de meerderheid prefereert  $a \succ b \succ c \succ a$

Condorcet's paradox

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele spelers*

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

*D* is *dominante* strategie: optimaal ongeacht wat de rest doet  
bijv. eerlijk zijn in Gale-Shapley

# Algemener: Speltheorie

## *Rationele* spelers

- maximaliseren hun individuele nut
- handelen *strategisch* (liegen in Stable Matching?)

## Voorbeeld: Prisoner's Dilemma

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3, 3)	(0, 5)
<i>D</i>	(5, 0)	(1, 1)

*D* is *dominante* strategie: optimaal ongeacht wat de rest doet  
bijv. eerlijk zijn in Gale-Shapley

(*C*, *C*) is Pareto Optimaal: maximaal *gezamenlijk* nut

# Mechanism Design

Hoe het spel ontwerpen zodat rationele spelers

- *niet* méér nut krijgen door te liegen, maar
- *wel* het Pareto optimum bereiken?

# Mechanism Design

Hoe het spel ontwerpen zodat rationele spelers

- *niet* méér nut krijgen door te liegen, maar
- *wel* het Pareto optimum bereiken?

Mechanism Design = 'Inverse Game Theory'

# Mechanism Design

Hoe het spel ontwerpen zodat rationele spelers

- *niet* méér nut krijgen door te liegen, maar
- *wel* het Pareto optimum bereiken?

Mechanism Design = ‘Inverse Game Theory’

- verkiezingen (meerderheid, Condorcet, Borda, ...)
- marktmechanismen (veilingen, prijsmechanisme, ...)
- onderhandelingsprotocollen

# Mechanism Design

Hoe het spel ontwerpen zodat rationele spelers

- *niet* méér nut krijgen door te liegen, maar
- *wel* het Pareto optimum bereiken?

Mechanism Design = 'Inverse Game Theory'

- verkiezingen (meerderheid, Condorcet, Borda, ...)
- marktmechanismen (veilingen, prijsmechanisme, ...)
- onderhandelingsprotocollen

Economie Nobelprijzen:

- GT: 1996 (Harsanyi, Nash & Selten), 2005 (Aumann & Schelling)
- MD: 2007 (Hurwicz, Maskin & Myerson)

# Voting Games

# Voting Games

- agenten  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , gewichten  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ,  $q$
- voor gegeven  $q$  is een coalitie  $S \subseteq N$  'winnend' als

$$\sum_{j \in S} w_j \geq q$$

- voting game:  $[q : w_1, w_2, \dots, w_n]$

Dit beschrijft bijvoorbeeld:

- coalitie-formatie in NL na (vorige) verkiezingen ( $q = 76$ )
- besluitvorming in de EU
- VS electoraal college (dat de president kiest)
- stemmen o.b.v. aantal aandelen

# Coalitie-formatie in Nederland

CDA	41
PVDA	32
SP	26
VVD	22
PVV	9
GL	7
CU	6
D66	3
PVDD	2
SGP	2

[76 : 41, 32, 26, 22, 9, 7, 6, 3, 2, 2]

# EU Besluitvorming

Verdrag van Nice (2001):  $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$$v_1 = [232; 29, 29, 29, 29, 27, 27, 13, 12, 12, 12, 12, 12, 10, 10, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 4, 4, 4, 4, 3],$$

$$v_2 = [13; 1, 1],$$

$$v_3 = [620; 182, 131, 130, 126, 91, 84, 36, 24, 23, 23, 22, 22, 20, 18, 12, 12, 11, 9, 8, 5, 4, 3, 2, 1, 1]$$

# EU Besluitvorming

Verdrag van Nice (2001):  $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$$v_1 = [232; 29, 29, 29, 29, 27, 27, 13, 12, 12, 12, 12, 12, 10, 10, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 4, 4, 4, 4, 3],$$

$$v_2 = [13; 1, 1],$$

$$v_3 = [620; 182, 131, 130, 126, 91, 84, 36, 24, 23, 23, 22, 22, 20, 18, 12, 12, 11, 9, 8, 5, 4, 3, 2, 1, 1]$$

dus een stemming is vóór als

- hij kan rekenen op de steun van tenminste 13 staten ( $v_2$ )
- die tenminste 62% van de EU populatie vertegenwoordigen ( $v_3$ )
- en tenminste 232 stemmen hebben ( $v_1$ )

# Voting Power (Prasad & Kelly, 1990)

Voting power van agent  $i$ ,  $\Pi(i) = f(\Theta_i)$

# Voting Power (Prasad & Kelly, 1990)

Voting power van agent  $i$ ,  $\Pi(i) = f(\Theta_i)$

$\Theta_i$  is het aantal keren dat  $i$  'kritiek' is, d.w.z. het aantal subsets  $S \subseteq N - \{i\}$  zodat

$$\sum_{j \in S} w_j < q \quad \text{en} \quad w_i + \sum_{j \in S} w_j \geq q$$

( $S$  verliest zonder  $i$  en wint met  $i$ )

# Voting Power (Prasad & Kelly, 1990)

Voting power van agent  $i$ ,  $\Pi(i) = f(\Theta_i)$

$\Theta_i$  is het aantal keren dat  $i$  'kritiek' is, d.w.z. het aantal subsets  $S \subseteq N - \{i\}$  zodat

$$\sum_{j \in S} w_j < q \quad \text{en} \quad w_i + \sum_{j \in S} w_j \geq q$$

( $S$  verliest zonder  $i$  en wint met  $i$ )

**Naam:** KRITIEK

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j \geq 0 \forall j$ ,  $q > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$

**Vraag:** is  $\Theta_i > 0$ ?

# KRITIEK is NP-compleet

Stelling: KRITIEK is NP-compleet

KRITIEK  $\in$  NP:

- raad een  $S$  en verifieer de ongelijkheden

# KRITIEK is NP-compleet

Stelling: KRITIEK is NP-compleet

KRITIEK  $\in$  NP:

- raad een  $S$  en verifieer de ongelijkheden

KRITIEK  $\in$  NP-Hard:

$$\leq_P \text{KRITIEK}$$

# KRITIEK is NP-compleet

Stelling: KRITIEK is NP-compleet

KRITIEK  $\in$  NP:

- raad een  $S$  en verifieer de ongelijkheden

KRITIEK  $\in$  NP-Hard:

- SUBSET-SUM  $\leq_P$  KRITIEK

# KRITIEK is NP-compleet

Stelling: KRITIEK is NP-compleet

KRITIEK  $\in$  NP:

- raad een  $S$  en verifieer de ongelijkheden

KRITIEK  $\in$  NP-Hard:

- SUBSET-SUM  $\leq_P$  KRITIEK

**Naam:** SUBSET-SUM

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j \geq 0 \forall j$ ,  $q > 0$

**Vraag:** is er een subset  $S \subseteq N$  zodat  $\sum_{j \in S} w_j = q$ ?

# Reductie

Neem een instantie  $I = (W, q)$  van SUBSET-SUM.

Construeer een instantie van KRITIEK  $I' = f(W, q) = (W', q', i')$

# Reductie

Neem een instantie  $I = (W, q)$  van SUBSET-SUM.

Construeer een instantie van KRITIEK  $I' = f(W, q) = (W', q', i')$  als volgt:

$$W' = (w_1, w_2, \dots, w_n, 1) \quad (N' = N \cup \{i'\})$$

$$q' = q + 1$$

$$i' = n + 1$$

# Reductie

Neem een instantie  $I = (W, q)$  van SUBSET-SUM.

Construeer een instantie van KRITIEK  $I' = f(W, q) = (W', q', i')$  als volgt:

$$W' = (w_1, w_2, \dots, w_n, 1) \quad (N' = N \cup \{i'\})$$

$$q' = q + 1$$

$$i' = n + 1$$

te bewijzen:  $I \leftrightarrow I'$

# Heen ...

$\text{yes}_I \rightarrow \text{yes}_{I'}$

- er is een subset  $S \subseteq N$  zodat  $\sum_{j \in S} w_j = q$
- dus voor  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n, n + 1\} - \{n + 1\}$  geldt  $\sum_{j \in S} w_j = q$

# Heen ...

$\text{yes}_I \rightarrow \text{yes}_{I'}$

- er is een subset  $S \subseteq N$  zodat  $\sum_{j \in S} w_j = q$
- dus voor  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n, n + 1\} - \{n + 1\}$  geldt  $\sum_{j \in S} w_j = q$ 
  - dus  $\sum_{j \in S} w_j < q + 1 = q'$
  - en  $1 + \sum_{j \in S} w_j > q$  dus  $1 + \sum_{j \in S} w_j \geq q + 1 = q'$

# ... en Weer

$\text{yes}_{I'} \rightarrow \text{yes}_I$

# ... en Weer

$\text{yes}_{I'} \rightarrow \text{yes}_I$  (oftewel:  $\text{no}_I \rightarrow \text{no}_{I'}$ )

# ... en Weer

$\text{yes}_{I'} \rightarrow \text{yes}_I$  (oftewel:  $\text{no}_I \rightarrow \text{no}_{I'}$ ) (indirect bewijs):

- neem aan dat  $\text{no}_I \wedge \text{yes}_{I'}$ :

# ... en Weer

$\text{yes}_{I'} \rightarrow \text{yes}_I$  (oftewel:  $\text{no}_I \rightarrow \text{no}_{I'}$ ) (indirect bewijs):

- neem aan dat  $\text{no}_I \wedge \text{yes}_{I'}$ :
- $\text{yes}_{I'}$ : er is dus een subset  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n, n+1\} - \{n+1\}$  zodat

$$\sum_{j \in S} w_j < q' \quad \text{en} \quad 1 + \sum_{j \in S} w_j \geq q'$$

$$\sum_{j \in S} w_j < q + 1 \quad \text{en} \quad 1 + \sum_{j \in S} w_j \geq q + 1$$

$$\sum_{j \in S} w_j \leq q \quad \text{en} \quad \sum_{j \in S} w_j \geq q, \quad \text{dus} \quad \sum_{j \in S} w_j = q$$

# ... en Weer

$\text{yes}_{I'} \rightarrow \text{yes}_I$  (oftewel:  $\text{no}_I \rightarrow \text{no}_{I'}$ ) (indirect bewijs):

- neem aan dat  $\text{no}_I \wedge \text{yes}_{I'}$ :
- $\text{yes}_{I'}$ : er is dus een subset  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n, n+1\} - \{n+1\}$  zodat

$$\sum_{j \in S} w_j < q' \quad \text{en} \quad 1 + \sum_{j \in S} w_j \geq q'$$

$$\sum_{j \in S} w_j < q + 1 \quad \text{en} \quad 1 + \sum_{j \in S} w_j \geq q + 1$$

$$\sum_{j \in S} w_j \leq q \quad \text{en} \quad \sum_{j \in S} w_j \geq q, \quad \text{dus} \quad \sum_{j \in S} w_j = q$$

maar dan is  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  met  $\sum_{j \in S} w_j = q$  een yes-instantie van SUBSET-SUM  $\rightarrow$  contradictie, dus  $\text{no}_I \rightarrow \text{no}_{I'}$

# Power Indices

Power indices: *a priori* macht

Power index is een functie  $\Pi : N \mapsto \mathbb{R}$  die voldoet aan bepaalde axioma's, bijv.  $\Pi(i) = 0$  alss  $\Theta_i = 0$ .

# Power Indices

Power indices: *a priori* macht

Power index is een functie  $\Pi : N \mapsto \mathbb{R}$  die voldoet aan bepaalde axioma's, bijv.  $\Pi(i) = 0$  alss  $\Theta_i = 0$ .

belangrijke indices:

- (Absolute) Banzhaf index:  $\Pi(i) = \frac{\Theta_i}{2^{n-1}}$
- Banzhaf-Coleman index:  $\Pi(i) = \frac{\Theta_i}{\sum_{j \in N} \Theta_j}$
- Shapley-Shubik index

# POWER is NP-compleet

**Naam:** POWER

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j \geq 0 \forall j, q > 0, 1 \leq i \leq n$

**Vraag:** is  $\Pi(i) > 0$ ?

# POWER is NP-compleet

**Naam:** POWER

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j \geq 0 \forall j, q > 0, 1 \leq i \leq n$

**Vraag:** is  $\Pi(i) > 0$ ?

**Stelling:** POWER is NP-compleet voor Banzhaf en Banzhaf-Coleman

# POWER is NP-compleet

**Naam:** POWER

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j \geq 0 \forall j, q > 0, 1 \leq i \leq n$

**Vraag:** is  $\Pi(i) > 0$ ?

**Stelling:** POWER is NP-compleet voor Banzhaf en Banzhaf-Coleman

Volgt uit vorige stelling en het feit dat  $\Pi(i) > 0$  alss  $\Theta_i > 0$

(NP-Compleetheid van POWER voor Shapley-Shubik was al bekend)

# Algemener probleem

Modificatie van KRITIEK:

$r$ -KRITIEK: instantie  $+ = r$ , is  $\Theta_i > r$ ?

# Algemener probleem

Modificatie van KRITIEK:

$r$ -KRITIEK: instantie  $+ = r$ , is  $\Theta_i > r$ ?

speciaal geval van  $r$ -KRITIEK is makkelijker NP-compleet te bewijzen:

**Naam:**  $r$ -KRITIEKPOS

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j > 0 \forall j$ ,  $r, q \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq n$

**Vraag:** is  $\Theta_i > r$ ?

# Algemener probleem

Modificatie van KRITIEK:

$r$ -KRITIEK: instantie  $+ = r$ , is  $\Theta_i > r$ ?

speciaal geval van  $r$ -KRITIEK is makkelijker NP-compleet te bewijzen:

**Naam:**  $r$ -KRITIEKPOS

**Instantie:**  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  met  $w_j > 0 \forall j$ ,  $r, q \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq n$

**Vraag:** is  $\Theta_i > r$ ?

**Stelling:**  $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

# $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP:

- raad  $r$  coalities en verifieer de ongelijkheden

# $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP:

- raad  $r$  coalities en verifieer de ongelijkheden

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard:

(bewijs met inductie)

# $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP:

- raad  $r$  coalities en verifieer de ongelijkheden

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard:

(bewijs met inductie)

**IH:**  $r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard

# $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP:

- raad  $r$  coalities en verifieer de ongelijkheden

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard:

(bewijs met inductie)

**IH:**  $r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard

**BC:** ( $r = 0$ ) is bewezen in de vorige stelling

# $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP:

- raad  $r$  coalities en verifieer de ongelijkheden

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard:

(bewijs met inductie)

**IH:**  $r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard

**BC:** ( $r = 0$ ) is bewezen in de vorige stelling

**IS:**  $(r - 1)$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard  $\rightarrow r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard

# $r$ -KRITIEKPOS is NP-compleet

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP:

- raad  $r$  coalities en verifieer de ongelijkheden

$r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard:

(bewijs met inductie)

**IH:**  $r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard

**BC:** ( $r = 0$ ) is bewezen in de vorige stelling

**IS:**  $(r - 1)$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard  $\rightarrow r$ -KRITIEKPOS  $\in$  NP-hard

te bewijzen:  $(r - 1)$ -KRITIEKPOS  $\leq_P r$ -KRITIEKPOS

# Een Reductie als Inductie

$(r - 1)$ -KRITIEKPOS  $\leq_P$   $r$ -KRITIEKPOS

Neem een instantie  $I = (W, r - 1, q, i)$  van  $(r - 1)$ -KRITIEKPOS.

Construeer een instantie van  $r$ -KRITIEKPOS

$$I' = f(W, r - 1, q, i) = (W', r, q, i)$$

# Een Reductie als Inductie

$(r - 1)$ -KRITIEKPOS  $\leq_P$   $r$ -KRITIEKPOS

Neem een instantie  $I = (W, r - 1, q, i)$  van  $(r - 1)$ -KRITIEKPOS.

Construeer een instantie van  $r$ -KRITIEKPOS

$I' = f(W, r - 1, q, i) = (W', r, q, i)$  als volgt:

$W' = (w_1, w_2, \dots, w_n, q - 1)$  (dus  $N' = N \cup \{n + 1\}$ )

# Een Reductie als Inductie

te bewijzen:  $\Theta_i > r - 1$  in  $I \leftrightarrow \Theta_i > r$  in  $I'$

# Een Reductie als Inductie

te bewijzen:  $\Theta_i > r - 1$  in  $I \leftrightarrow \Theta_i > r$  in  $I'$

- voor elke coalitie  $S \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$  waarvoor in  $I$  geldt dat

$$\sum_{j \in S} w_j < q \quad \text{en} \quad w_i + \sum_{j \in S} w_j \geq q,$$

geldt dit ook in  $I'$ .

# Een Reductie als Inductie

te bewijzen:  $\Theta_i > r - 1$  in  $I \leftrightarrow \Theta_i > r$  in  $I'$

- voor elke coalitie  $S \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$  waarvoor in  $I$  geldt dat

$$\sum_{j \in S} w_j < q \text{ en } w_i + \sum_{j \in S} w_j \geq q,$$

geldt dit ook in  $I'$ .

- In  $I'$  is er bovendien de singleton coalitie  $S' = \{n + 1\}$  waarvoor geldt dat

$$\sum_{j \in S'} w_j = q - 1 < q \text{ en } w_i + \sum_{j \in S'} w_j = w_i + q - 1 \geq q.$$

omdat  $w_i > 0$

# Een Reductie als Inductie

- elke *andere* coalitie  $S'' \subseteq \{1, 2, \dots, n, n + 1\} - \{i\}$  waarvan  $n + 1$  deel uitmaakt, heeft al

$$\sum_{j \in S''} w_j \geq q.$$

- dus  $\Theta_i$  in  $I'$  is precies 1 groter dan  $\Theta_i$  in  $I$ .
- dus  $\Theta_i > r - 1$  in  $I$  alss  $\Theta_i > r$  in  $I'$ .

# Manipuleren van Verkiezingen

Gibbard-Satterthwaite Theorem: met  $\geq 3$  alternatieven is elk niet-dictatoriaal voting systeem dat één alternatief kiest kwetsbaar voor strategisch gedrag

→ hoe erg is dit?

# Manipuleren van Verkiezingen

Gibbard-Satterthwaite Theorem: met  $\geq 3$  alternatieven is elk niet-dictatoriaal voting systeem dat één alternatief kiest kwetsbaar voor strategisch gedrag

→ hoe erg is dit?

Strategisch gedrag:

- met spruitjes  $\succ_i$  patat  $\succ_i$  pannenkoeken voor patat stemmen omdat je weet dat spruitjes geen kans maken.
- problematisch omdat sociale keuze systemen erop gericht zijn preferenties te aggregeren met een 'sociale' uitkomst
- 'geen probleem' als het bepalen hoe te manipuleren ondoenlijk is.
- ondoenlijk voor grote aantallen kandidaten, maar voor kleine?

# Manipuleren van Verkiezingen

## Definities

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  is de verzameling kiezers
- $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, m\}$  is de verzameling 'kandidaten'
- preferenties van kiezer  $i$ : lineaire ordening  $O_i$  over  $\mathcal{X}$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  zodat  $c_1 \succ_i c_2 \succ_i \dots \succ_i c_m$
- preferentie-profiel  $P = \langle O_1, O_2, \dots, O_n \rangle$
- $\mathcal{P}$  is verzameling profielen
- gewichten: functie  $f : N \mapsto \mathbb{N}$

# Manipuleren van Verkiezingen

## Definities

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  is de verzameling kiezers
- $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, m\}$  is de verzameling 'kandidaten'
- preferenties van kiezer  $i$ : lineaire ordening  $O_i$  over  $\mathcal{X}$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  zodat  $c_1 \succ_i c_2 \succ_i \dots \succ_i c_m$
- preferentie-profiel  $P = \langle O_1, O_2, \dots, O_n \rangle$
- $\mathcal{P}$  is verzameling profielen
- gewichten: functie  $f : N \mapsto \mathbb{N}$

Voting protocol: functie  $o : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{X}$

# Positional Scoring protocollen

- $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$  is een vector integers, zodat  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_m$ .
- voor elke kiezer ontvangt een kandidaat  $\alpha_1$  punten als hij als 1ste wordt geordend door de kiezer,  $\alpha_2$  punten als hij als 2de wordt geordend, etc.
- de score  $s_{\vec{\alpha}}$  van een kandidaat is de som van de punten
- kandidaat met de meeste punten wint

# Positional Scoring protocollen

- $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$  is een vector integers, zodat  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_m$ .
- voor elke kiezer ontvangt een kandidaat  $\alpha_1$  punten als hij als 1ste wordt geordend door de kiezer,  $\alpha_2$  punten als hij als 2de wordt geordend, etc.
- de score  $s_{\vec{\alpha}}$  van een kandidaat is de som van de punten
- kandidaat met de meeste punten wint
- meerderheidsregel:  $\vec{\alpha} = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle$
- Borda:  $\vec{\alpha} = \langle m - 1, m - 2, \dots, 0 \rangle$
- veto:  $\vec{\alpha} = \langle 1, 1, \dots, 1, 0 \rangle$

# Andere Protocollen

- Maximin (aka Simpson)
- Copeland
- Single Transferable Vote (STV)
- Plurality with Run-off
- Cup (sequential binary comparison)

# Een Verkiezing Manipuleren

Classificatie van manipulatie-problemen:

- manipulators  $T$  vs. non-manipulators  $S$
- **complete** vs. incomplete informatie
- manipulatie door een individu vs. door een **coalitie**?
- hebben de kiezers **wel** of geen gewichten?
- is het doel een gegeven kandidaat te laten **winnen** of verliezen (constructieve resp. destructieve manipulatie)?

op basis van (Conitzer, Sandholm & Lang, 2007)

# Constructieve CW manipulatie

(CW = Coalitional Weighted)

**Naam:** CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE

**Instantie:** Set gewogen stemmen  $S$  (van de non-manipulators), gewichten voor manipulators  $T$ , geprefereerde kandidaat  $p$

**Vraag:** is er een manier om de stemmen in  $T$  zo uit te brengen dat  $p$  de verkiezing wint?

**Stelling:** voor elk Positional Scoring protocol behalve de meerderheidsregel, is CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE NP-compleet voor 3 kandidaten.

# Bewijs

## CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE $\in$ NP

- raad een toewijzing van stemmen van agenten in  $T$  en check dat  $p$  wint

# Bewijs

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $\in$  NP

- raad een toewijzing van stemmen van agenten in  $T$  en check dat  $p$  wint

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $\in$  NP-hard:

$\leq_P$  CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE

# Bewijs

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $\in$  NP

- raad een toewijzing van stemmen van agenten in  $T$  en check dat  $p$  wint

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $\in$  NP-hard:

PARTITION  $\leq_P$  CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE

# Bewijs

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $\in$  NP

- raad een toewijzing van stemmen van agenten in  $T$  en check dat  $p$  wint

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $\in$  NP-hard:

PARTITION  $\leq_P$  CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE

**Naam:** PARTITION

**Instantie:** multi-set integers  $A = \{k_i\}_{1 \leq i \leq t}$ ,  $\sum_{i \in A} k_i = 2K$

**Vraag:** is er een subset  $S \subseteq A$  zodat  $\sum_{j \in S} k_j = K$ ?

# Constructie van de Transformatie

N.B.: voor  $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$  kunnen we een constante toevoegen zodat  $\alpha_3 = 0$ , en herschalen zodat  $\alpha_2 \geq 2$ .

# Constructie van de Transformatie

N.B.: voor  $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$  kunnen we een constante toevoegen zodat  $\alpha_3 = 0$ , en herschalen zodat  $\alpha_2 \geq 2$ .

Neem een instantie  $I = (A)$  van PARTITION ( $K = \sum_{i \in A} k_i / 2$ ).

Construeer een instantie van

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $I' = f(A) = (S, T, p)$

# Constructie van de Transformatie

N.B.: voor  $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$  kunnen we een constante toevoegen zodat  $\alpha_3 = 0$ , en herschalen zodat  $\alpha_2 \geq 2$ .

Neem een instantie  $I = (A)$  van PARTITION ( $K = \sum_{i \in A} k_i / 2$ ).

Construeer een instantie van

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $I' = f(A) = (S, T, p)$  als volgt (de 3 kandidaten zijn  $a, b$ , en  $p$ ):

$S = (2\alpha_1 - \alpha_2)K - 1$  kiezers met  $O_i = (a, b, p)$  en

$(2\alpha_1 - \alpha_2)K - 1$  kiezers met  $O_i = (b, a, p)$

$T =$  een stem met gewicht  $(\alpha_1 + \alpha_2)k_i$ , voor elke  $k_i \in A$

# Constructie van de Transformatie

N.B.: voor  $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$  kunnen we een constante toevoegen zodat  $\alpha_3 = 0$ , en herschalen zodat  $\alpha_2 \geq 2$ .

Neem een instantie  $I = (A)$  van PARTITION ( $K = \sum_{i \in A} k_i / 2$ ).

Construeer een instantie van

CONSTRUCTIEVE-CW-MANIPULATIE  $I' = f(A) = (S, T, p)$  als volgt (de 3 kandidaten zijn  $a, b$ , en  $p$ ):

$S = (2\alpha_1 - \alpha_2)K - 1$  kiezers met  $O_i = (a, b, p)$  en

$(2\alpha_1 - \alpha_2)K - 1$  kiezers met  $O_i = (b, a, p)$

$T =$  een stem met gewicht  $(\alpha_1 + \alpha_2)k_i$ , voor elke  $k_i \in A$

Te bewijzen:  $I \leftrightarrow I'$

# Correctheid

$I \rightarrow I'$ :

# Correctheid

$I \rightarrow I'$ :

- Stel dat er een partitie van  $A$  bestaat
- laat de ene helft van  $T$   $(p, a, b)$  stemmen en de andere  $(p, b, a)$

# Correctheid

$I \rightarrow I'$ :

- Stel dat er een partitie van  $A$  bestaat
- laat de ene helft van  $T$   $(p, a, b)$  stemmen en de andere  $(p, b, a)$
- dan zijn de scores (met  $(\alpha_1 + \alpha_2)2K$  stemmen in  $T$ )

$$\begin{aligned}s_p &= (\alpha_1 + \alpha_2)(2K\alpha_1) \\ s_a = s_b &= 2K\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)(2K\alpha_1 - 1)\end{aligned}$$

- $s_p > s_a = s_b$ , dus is  $p$  de winnaar en bestaat de gezochte manipulatie

# Correctheid

$I \rightarrow I'$ :

- Stel dat er een partitie van  $A$  bestaat
- laat de ene helft van  $T$   $(p, a, b)$  stemmen en de andere  $(p, b, a)$
- dan zijn de scores (met  $(\alpha_1 + \alpha_2)2K$  stemmen in  $T$ )

$$\begin{aligned} s_p &= (\alpha_1 + \alpha_2)(2K\alpha_1) \\ s_a = s_b &= 2K\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)(2K\alpha_1 - 1) \end{aligned}$$

- $s_p > s_a = s_b$ , dus is  $p$  de winnaar en bestaat de gezochte manipulatie

$I' \rightarrow I$ : (onvolkomenheid in bewijs, correctie op blackboard)

5 maart 2008

34

# Deel-Overzicht Resultaten

Aantal kandidaten	2	3	4, 5, 6	$\geq 7$
Borda	P	NP-compleet	NP-compleet	NP-compleet
veto	P	NP-compleet	NP-compleet	NP-compleet
STV	P	NP-compleet	NP-compleet	NP-compleet
Plurality with Run-off	P	NP-compleet	NP-compleet	NP-compleet
Copeland	P	P	NP-compleet	NP-compleet
Maximin	P	P	NP-compleet	NP-compleet
Randomized Cup	P	P	P	NP-compleet
Regular Cup	P	P	P	P
plurality	P	P	P	P

Conitzer, Sandholm & Lang (2007)

# Verwante Problemen

Complexiteit van ...

- Mechanism Design
- allocatie van goederen in combinatorische veilingen
- complexiteit van bepalen van rationeel gedrag
- het ontwerpen van 'deals' (EU)
- omkoping met beperkt budget
- bepalen van de winnaars van een verkiezing
- 'gerrymandering' (herindelen van kiesdistricten)

# Aanbevelingen

Geïnteresseerd?

# Aanbevelingen

Geïnteresseerd?

- boek *Algorithmic Game Theory*

`http://www.cambridge.org/journals/nisan/  
username=agt1user, password=camb2agt`

# Aanbevelingen

## Geïnteresseerd?

- boek *Algorithmic Game Theory*  
`http://www.cambridge.org/journals/nisan/username=agt1user,password=camb2agt`
- NVTI dag: Christos Papadimitriou, “Computing Equilibria”
  - Textbook *Computational Complexity* (1994)
  - Voorwoord en Hfdst 2 *Algorithmic Game Theory*
  - “Mechanism Design is ‘Inverse Game Theory’”

# Aanbevelingen

## Geïnteresseerd?

- boek *Algorithmic Game Theory*  
<http://www.cambridge.org/journals/nisan/>  
username=agt1user, password=camb2agt
- NVTI dag: Christos Papadimitriou, “Computing Equilibria”
  - Textbook *Computational Complexity* (1994)
  - Voorwoord en Hfdst 2 *Algorithmic Game Theory*
  - “Mechanism Design is ‘Inverse Game Theory’”
- Bachelor Seminarium (BSc. Q4)
- CABS Seminar (MSc. Q4)

# Aanbevelingen

## Geïnteresseerd?

- boek *Algorithmic Game Theory*  
<http://www.cambridge.org/journals/nisan/>  
username=agt1user, password=camb2agt
- NVTI dag: Christos Papadimitriou, “Computing Equilibria”
  - Textbook *Computational Complexity* (1994)
  - Voorwoord en Hfdst 2 *Algorithmic Game Theory*
  - “Mechanism Design is ‘Inverse Game Theory’”
- Bachelor Seminarium (BSc. Q4)
- CABS Seminar (MSc. Q4)
- Algoritmiek Groep van Cees Witteveen

Vragen?

# Literatuur

- Kislaya Prasad & Jerry S. Kelly, “NP-Completeness of Some Problems Concerning Voting Games,” *International Journal of Game Theory*, 19:1–19, 1990.  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF01753703>
- Vincent Conitzer, Tuomas Sandholm & Jérôme Lang, “When are Elections with Few Candidates Hard to Manipulate,” *Journal of the ACM*, 54:1–33, 2007.  
<http://dx.doi.org/10.1145/1236457.1236461>